Prvi domaći zadatak iz predmeta Linearna algebra 2

Preduslov: Pročitati sedmo poglavlje udžbenika)

1. Provjeriti da li sljedeća preslikavanja zadaju skalarni proizvod na $\mathbb{R}^4$:
a) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 4x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_4y_4$;
b) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 + x_4y_4$;
c) $\langle x, y\rangle = x_1y_4 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_4y_1$.

2. Provjeriti da li sljedeća preslikavanja zadaju skalarni proizvod na $P_{\leq 3}$:
a) $\langle f, g\rangle = \int\limits_0^1 f(t)g(t)dt, \quad \forall f, g \in P_{\leq 3}$;
b) $\langle f, g\rangle = \int\limits_0^1 f'(t)g(t)dt, \quad \forall f, g \in P_{\leq 3}$;
c) $\langle f, g\rangle = a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$, gdje je $f(t) = a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3, \quad g(t) = b_0+b_1t+b_2t^2+b_3t^3$.

3. Provjeriti da li sljedeća preslikavanja zadaju skalarni proizvod na prostoru matrica $M_{2\times 2}$:
a) $\langle A, B\rangle = tr(A + B)$;
b) $\langle A, B\rangle = tr(B^T \cdot A)$;
c) $\langle A, B\rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$, gdje su $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$.

4. Naći nenulti vektor $w \in \mathbb{R}^3$ koji je ortogonalan (u odnosu na standardni skalarni proizvod) vektorima $u = (1, 2, 1)$ i $v = (2, 5, -4)$.

5. Provjeriti da li sljedeće preslikavanje zadaje skalarni proizvod na $\mathbb{R}^2$:
$\langle x, y\rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$.

6. Za koje vrijednosti parametra k sljedeće preslikavanje zadaje skalarni proizvod na $\mathbb{R}^2$:
$\langle x, y\rangle = x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + kx_2y_2$?

7. Dokazati da u svakom euklidskom prostoru važi tzv. Hilbertov identitet:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(|x + y|^2 - |x - y|^2), \quad \forall x, y \in E.$$

8. Neka za vektore $x, y \in E$ važi $\langle x, y\rangle^2 = \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$ (tj. nejednakost Švarca se za ove vektore pretvara u jednakost). Pokazati da su vektori x i y linearno zavisni.

9. Provjeriti da li su tačna sljedeća tvrdjenja:
a) Ako je $\langle x, y\rangle = 0$ za svaki vektor $y \in E$, tada je x nula vektor.
b) Ako su $x, y, z \in E$ vektori takvi da $\langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle$, tada $y = z$.

10. Neka je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza u E i $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Pokazati da $\alpha_i = \langle x, e_i\rangle$ za $i = 1, \ldots, n$.

11. Neka je u prostoru $\mathbb{R}^2$ zadato sljedeće preslikavanje:

$$\langle f, g \rangle = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1).$$

a) Pokazati da ovo preslikavanje zadaje skalarni proizvod u $\mathbb{R}^2$.
b) Naći jednu ortonormiranu bazu u $\mathbb{R}^2$ za ovaj skalarni proizvod.

12. Da li preslikavanje iz prethodnog zadatka zadaje skalarni proizvod u prostoru $\mathbb{R}^3$? Zašto?

13. Neka je $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3)$ linearni operator, takav da $\mathcal{B}v \perp v$ za svaki vektor $v \in \mathbb{R}^3$.
a) Pokazati da operator $\mathcal{B}$ nije invertibilan.
b) Da li isto važi u prostoru $\mathbb{R}^2$?

Napomena: Studentima se preporučuje da urade sve zadatke. Za domaći treba poslati zadatke 1a), 2a), 3a), 4, 5, 7, 9, 10.

Napomena: Zadaci 11, 12 i 13 su za nijensu teži od ostalih.